

$$\Rightarrow 0 = \gamma'(\tilde{t}) = 2 \langle f, g \rangle + 2\tilde{t} \langle g, g \rangle$$

$$\Rightarrow \tilde{t} = - \langle f, g \rangle / \langle g, g \rangle$$

$$\text{Es folgt: } 0 \leq \gamma(\tilde{t}) = \langle f, f \rangle - 2 \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle} + \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle} \leq \langle f, f \rangle$$

Komplexwertige  $f, g$ : analog mit 2) □  $\uparrow$  Termin 8

Def 15.5 : a) Hilbert - Norm von  $f$

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2} = \left( \int_0^{2\pi} |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

b)  $f$  ist senkrecht zu  $g$  (i.Z.  $f \perp g$ )

$$\Leftrightarrow \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle = 0$$

c)  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  heißt ein Orthonormalsystem  
ONS ( $A$  beliebige Indexmenge) :  $\Leftrightarrow$

$$\langle f_\alpha, f_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in A,$$

$$\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\text{Kronecker Delta})$$

Bem: 1.) Es gilt die Dreiecks-Ungleichung

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

(berechne  $\|f+g\|_2^2$  und benutze Schwarz,

also  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$  )

2.) Aus  $\|f\|_2 = 0$  folgt  $f = 0$  nur,  
 wenn  $f$  stetig ist.  $\|\cdot\|_2$  ist also nur  
 eine Pseudo-Norm.

3.) Es gilt für  $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = 2\pi \delta_{nm} \implies$$



$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ ist ein } \underline{\text{ONS}}$$

(der Vorfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  normiert die Vektoren auf 1)

4.) Notation: Sei  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  irgendein

ONS. Desweiteren sei  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

eine "Fejér Funktion". Die Zahlen

$$c_\alpha := \langle f, e_\alpha \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e_\alpha(x)} dx$$

heißen

Fourier-Koeff. von  $f$  bzgl.  $\{e_\alpha\}$ .

↖ ("die neuen")

-121-

Beispiel: Die <sup>(neu)</sup> Fourier-Koeff. von  $f$   
 bzgl.  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sind

$$c_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot (\text{alte Fourier-Koeff.})$$

5.) Seien  $A$  eine beliebige Indexmenge  
 (nicht notwendig abzählbar!) und  $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$   
 eine Familie von Zahlen  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ .

Def. 15.6 :  $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$  heißt summierbar

mit Summe  $a \in \mathbb{C}$  :  $\iff$  zu

jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $E_\varepsilon \subset A$ ,

$\# E_\varepsilon < \infty$ , mit

$$\left| a - \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha} \right| < \varepsilon$$

für alle  $E \subset A$  mit  $\# E < \infty$

und  $E \supset E_{\varepsilon}$  (man summiert also genügend weit)

Überlege:  $(a_{\alpha})_{\alpha \in A}$  summierbar  $\implies$

alle  $a_{\alpha} = 0$  bis auf höchstens abzählbar viele



Der nächste Satz sagt aus: „Die Fourier-Polynome minimieren unter allen Trigonome-  
trischen Polynomen den Abstand zu einer  
gegebenen Fejér - Funktion  $f$ .“

**Satz 15.9**: Sei  $\{w_\alpha\}_{\alpha \in A}$  irgendein

ONS,  $f$  sei Fejér-Funktion

und  $E \subset A$  endlich. Sind  $a_\alpha, \alpha \in E$ ,  
irgendwelche komplexen Zahlen, so wird  
der Abstand

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in E} a_\alpha w_\alpha \right\|_2$$

minimal genau dann, wenn man für  $a_\alpha$   
die Fourier-Koeff.  $c_\alpha = \langle f, w_\alpha \rangle$

von  $f$  bzgl.  $\{w_\alpha\}_{\alpha \in A}$  wählt.

Beweis: Es ist

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in E} a_\alpha w_\alpha \right\|_2^2 =$$

$$\left\langle f - \sum_{\alpha \in E} a_\alpha w_\alpha, f - \sum_{\alpha \in E} a_\alpha w_\alpha \right\rangle =$$

$$\langle f, f \rangle = \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha} \langle w_{\alpha}, f \rangle = \sum_{\alpha \in E} \overline{a_{\alpha}} \langle f, w_{\alpha} \rangle$$

$$+ \left\langle \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha} w_{\alpha}, \sum_{\beta \in E} a_{\beta} w_{\beta} \right\rangle =$$

$$\langle f, f \rangle = \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha} \overline{c_{\alpha}} = \sum_{\alpha \in E} \overline{a_{\alpha}} c_{\alpha} +$$

$$\sum_{\alpha \in E} |a_{\alpha}|^2 = \left( \begin{array}{c} \text{Einschieben von} \\ \sum_{\alpha \in E} |c_{\alpha}|^2 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\|f\|_2^2 - \sum_{\alpha \in E} |c_{\alpha}|^2}_{\text{}} + \sum_{\alpha \in E} |c_{\alpha} - a_{\alpha}|^2 =$$

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in E} c_{\alpha} w_{\alpha} \right\|_2^2 + \sum_{\alpha \in E} |c_{\alpha} - a_{\alpha}|^2 \geq$$

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in E} c_{\alpha} w_{\alpha} \right\|_2^2$$

mit  $\| = \|$  genau für  $a_{\alpha} = c_{\alpha}$ . □

Die Fourier-Koeff. von  $f \in \mathcal{F}$   
 bzgl. irgendeinem ONS haben eine über-  
raschende Summierbarkeitseigenschaft:  
 (vgl. A2, Blatt 5)

**Satz 15.10**

Sei  $f \in \mathcal{F}$  und  $\{w_\alpha\}_{\alpha \in A}$

ein ONS. Seien

$$c_\alpha := \langle f, w_\alpha \rangle$$

die Fourier-Koeff. von  $f$ . Dann  
 gilt:

$$\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

(Ungleichung von Bessel)

Beweis: Gemäß  $|c_\alpha|^2 \geq 0$  folgt

Summierbarkeit, wenn wir z.B. -126-

$$(*) \quad \sum_{\alpha \in E} |c_\alpha|^2 \leq \|f\|_2^2$$

für alle endlichen Teilmengen  $E \subset A$   
zeigen können.

ad  $(*)$ : Es gilt

$$0 \leq \|f - \sum_{\alpha \in E} c_\alpha w_\alpha\|_2^2 =$$

$$\|f - \sum_{\alpha \in E} \langle f, w_\alpha \rangle w_\alpha\|_2^2 \quad \text{und}$$

$$\|f - \sum_{\alpha \in E} c_\alpha w_\alpha\|_2^2 =$$

$$\langle f - \sum_{\alpha \in E} c_\alpha w_\alpha, f - \sum_{\beta \in E} c_\beta w_\beta \rangle =$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \langle w_\alpha, f \rangle \\
&= \sum_{\beta \in E} \overline{c_\beta} \langle f, w_\beta \rangle + \sum_{\alpha, \beta \in E} \langle c_\alpha w_\alpha, c_\beta w_\beta \rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \overline{c_\alpha} - \sum_{\beta \in E} \overline{c_\beta} c_\beta \\
&\quad + \sum_{\alpha, \beta \in E} c_\alpha \overline{c_\beta} \underbrace{\langle w_\alpha, w_\beta \rangle}_{=\delta_{\alpha\beta}} \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{\alpha \in E} |c_\alpha|^2 \implies (*)
\end{aligned}$$

□

Bem:

Fourier-Koeff. <sup>also</sup> erfüllen stets

$$\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 < \infty.$$

Daraus folgt nicht  $\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| < \infty$  !

Zur Hilbert - Norm  $\|\cdot\|_2$  auf  $\mathcal{F}$  - 128 -  
 gehört der folgende Konvergenzbegriff.

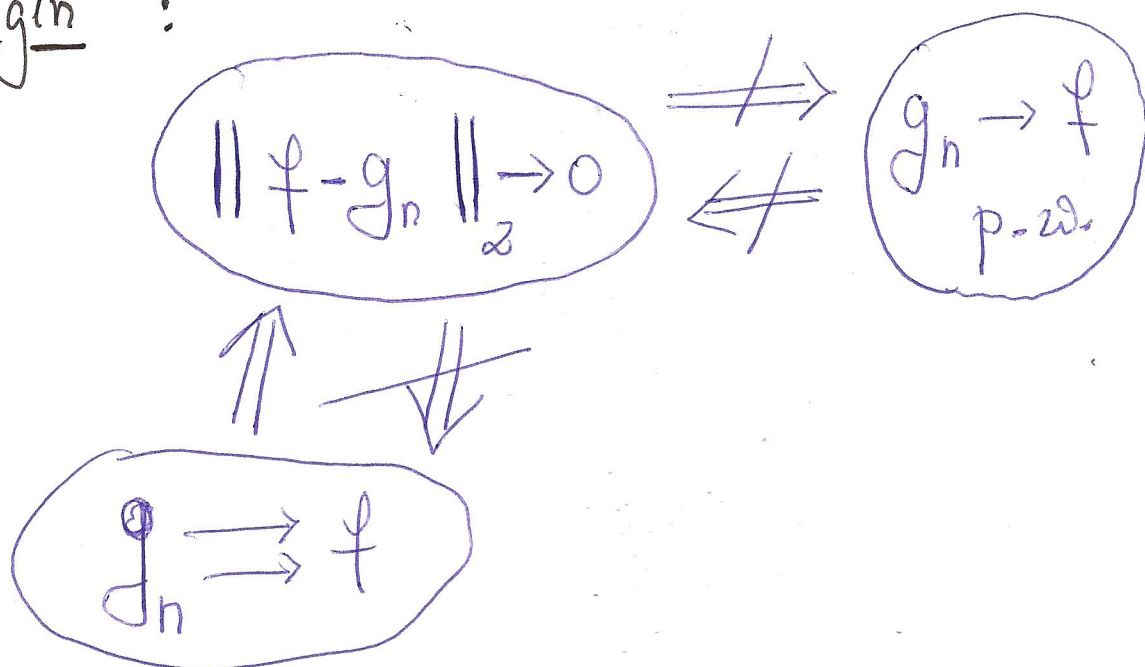
**Def 15.5** : Seien  $f, g_n \in \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir sagen:  $g_n$  konvergiert gegen  $f$   
im Sinne der Hilbert - Norm, falls

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^{2\pi} |f - g_n|^2 dx \right)^{1/2}$$

("Konvergenz im quadratischen Mittel")

Bsple zeigen :



angepasste Darstellungsfrage:

Gegeben sei ein ONS  $\{w_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

Wann gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{F}$

$$\left\| \varphi - \sum \langle \varphi, w_\alpha \rangle w_\alpha \right\|_2 \rightarrow 0?$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E_\varepsilon \subset A, \# E_\varepsilon < \infty$$

$$\text{mit } \left\| \varphi - \sum_{\alpha \in E} \langle \varphi, w_\alpha \rangle w_\alpha \right\|_2 \leq \varepsilon$$

$$\text{für alle } E, \# E < \infty, E \supset E_\varepsilon$$

beachte: mit  $c_\alpha := \langle \varphi, w_\alpha \rangle$

gilt (vgl. Rechnung im Beweis von 15.10)

$$\left\| \varphi - \sum_{\alpha \in E} \langle \varphi, w_\alpha \rangle w_\alpha \right\|_2^2 =$$

$$\| \varphi \|_2^2 = \sum_{\alpha \in E} |c_\alpha|^2$$

Also:  
(1)

$$\left\| \varphi - \sum_{\alpha} c_{\alpha} w_{\alpha} \right\|_2 \rightarrow 0$$

$$\iff \| \varphi \|_2^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_{\alpha}|^2$$

**Def 15.7** : Ein ONS  $\{w_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  heißt

vollständig, wenn die Bedingungen  
aus (1) für alle  $\varphi \in \mathcal{F}$  gelten.

(Darstellungseigenschaft bzgl. Hilbert-Norm)  
□

Es gilt die folgende sehr tiefe Aussage:

Satz 15.11 :

Das ONS  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$   
ist vollständig.

D. h. : Mit  $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

(alte Fourier - Koeff.) ist

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} \right|^2 dx$$

und

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

für alle  $f \in \mathcal{F}$ .

## Zentrale Beweisideen:

- approximiere  $f \in \mathcal{F}$  bzgl.  $\|\cdot\|_2$  durch stetige  $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ .
- benutze den Satz von Fejér für  $\tilde{f}$



## Schlussbemerkungen

( zur punktweisen Konvergenz  $S_n \rightarrow f$ ,  
 $S_n = \text{Fourier-Polynome}$  )

## Lemma (über Zahlenfolgen)

Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n := \sum_{k=1}^n a_k, \\ \tilde{S}_n := \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n S_\ell. \end{array} \right.$$

Ist dann  $\tilde{S}_n$  bei  $n \rightarrow \infty$  konvergent  
 gegen eine Zahl  $\tilde{S} \in \mathbb{C}$  und gilt  
 mit einer Konstanten  $c \geq 0$

$$|a_n| \leq c/n \quad \forall n,$$

so folgt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \tilde{S}$ .

Beweis: Barner - Flohr, Analysis 1,  
 Seite 474 + 475 □

Übersetzt heißt das zusammen mit  
 dem Satz von Fejér

**Satz 15.12** : Erfüllen die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  von  $f \in \mathcal{F}$

$$(*) \quad |c_k| \leq \text{const}/k \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\},$$

so konvergiert die Fourier-Reihe

punktweise gegen  $f$  und sogar glm.

auf allen Intervallen  $[a, b]$ , wo  $f$  stetig ist.  $\square$

Neue Frage: Welche  $f$  erfüllen nun  $(*)$ ?  
(vgl. Blatt 6, A1)  $\rightarrow$

**Satz 15.13** : Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig  
und  $2\pi$ -periodisch mit stetiger  
Ableitung. Dann konvergiert die

Fourier-Reihe glm. gegen  $f$ .

Beweis: Für die (alten) Fourier-Koeff.

gilt

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad n \neq 0$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{in} e^{-inx} \right) dx =$$

$$\underbrace{\left[ -\frac{1}{in} f(x) e^{-inx} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx}_{= 0 \text{ wegen Periodizität}}$$

$$\Rightarrow 2\pi |c_n| \leq \frac{1}{n} \cdot 2\pi \cdot \max_{[0, 2\pi]} |f'|$$

$$\Rightarrow |c_n| \leq \frac{1}{n} \|f'\|_{\infty}$$



Man kann gewisse Unstetigkeitsstellen und bzw. Nicht-Differenzierbarkeitspunkte zulassen, indem man das Intervall  $[0, 2\pi]$  entsprechend einteilt und die vorigen Aussagen benutzt. Das ergibt den für die Anwendungen ausreichenden

**Satz 15.14** :  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $2\pi$ -

periodisch und

stetig auf  $[0, 2\pi] - \{x_1, \dots, x_e\}$

mit Sprungstellen in  $x_1, \dots, x_e$ .

Außerdem existiere  $\varphi'$  auf  $[0, 2\pi]$

und sei stetig *bis auf endlich viele*

Ausnahmepunkte, in denen aber noch  
die einseitigen Ableitungen erklärt sind.

(typisches Bspl.:  $\varphi$   $2\pi$ -periodische  
Treppenfunktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ )

Dann konvergiert die Fourier-Reihe  
gleichmäßig gegen  $\varphi$  auf jedem Intervall,  
das keine Sprungstelle von  $\varphi$  enthält. In

Sprungstellen konvergiert sie gegen

$$\frac{1}{2} (\varphi(x+) + \varphi(x-)).$$

Übung 9



Schlussbemerkung :

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $\tau$ -periodisch  
 für ein  $\tau > 0$ , d.h.

$$f(x + \tau) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Setze

$$\widetilde{f}(x) := f\left(\frac{\tau}{2\pi}x\right)$$

$\Rightarrow \widetilde{f}$   $2\pi$ -periodisch, denn

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x + 2\pi) &= f\left(\frac{\tau}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = \\ &= f\left(\frac{\tau x}{2\pi} + \tau\right) = f\left(\frac{\tau x}{2\pi}\right) = \widetilde{f}(x). \end{aligned}$$

Theorie greift für  $\widetilde{f} \implies$

Sätze über  $f$  via Rücktransformation